① Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$

(i) $A^\circ = A / \partial A$

Sei $x \in A^\circ$, $x \notin \partial A$, da $x \in A$ ist x ein innerer Punkt von A.

x innerer Punkt von A, gilt $x \in A$ und $x \notin \partial A$, d.h. $x \in A^\circ$

(ii)

$\partial A = \partial(A^c)$, $x \in \partial A$ d.d.w. gilt $\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \nsubseteq A \wedge U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$

$\iff \forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \cap A^c \wedge U_\varepsilon(x) \nsubseteq A^c$

$A = (A^c)^c$

$U \in \mathbb{R}^n$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ außerhalb von U, $\exists \varepsilon > 0$, sodass jeder Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$, ebenfalls außerhalb U liegt.

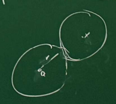
$\overline{A} = \partial A \,\dot{\cup}\, A^\circ$, $A^\circ = A \setminus \partial A$, dann wissen wir das $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$

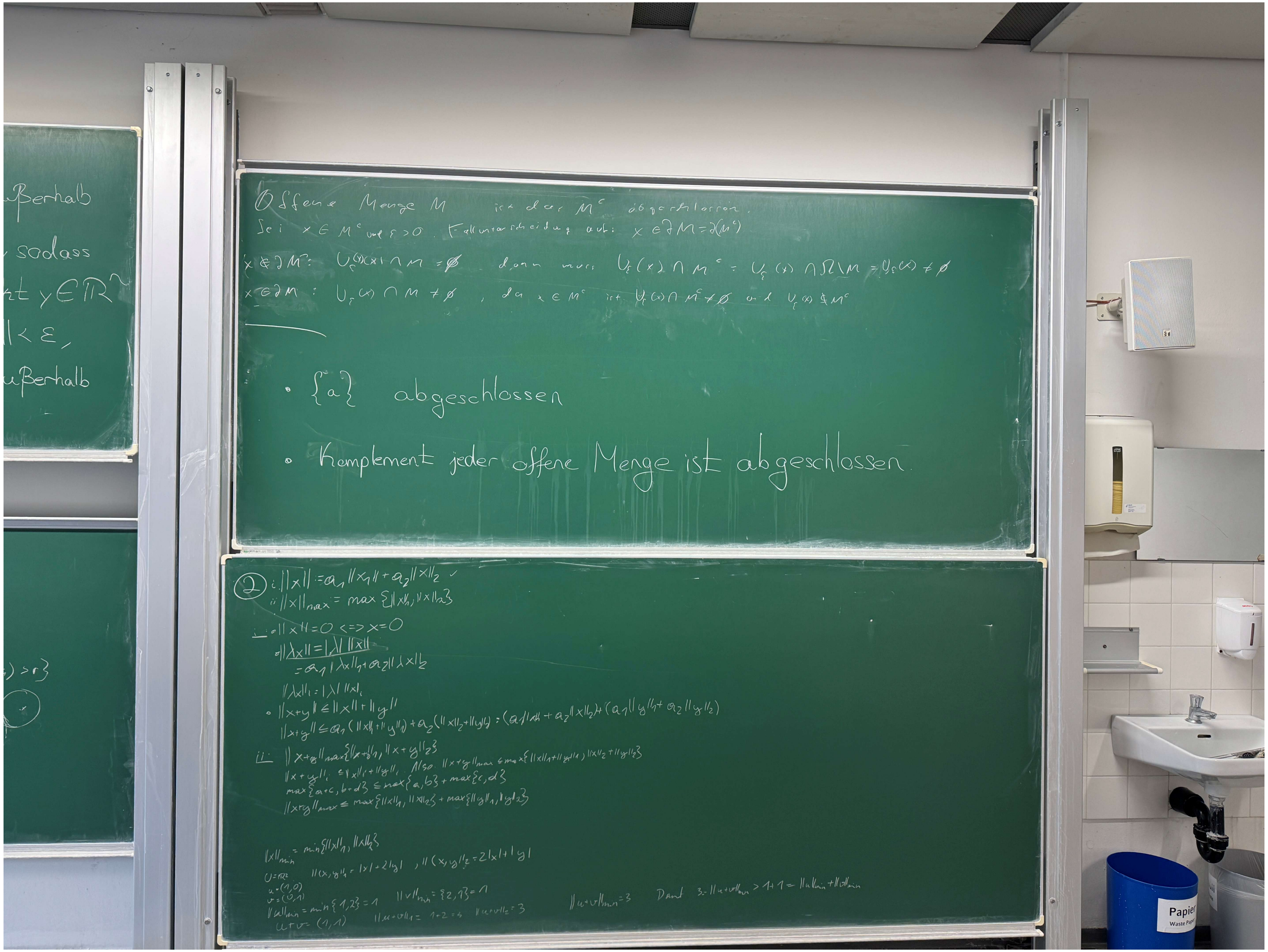
$(A \setminus \partial A) \cup \partial A = A$ daher $A^\circ \,\dot{\cup}\, \partial A = A$

(iii) Sei $a \in X$ und $r > 0$. $K_r(a) := \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$, $K_r(a)^c = X \setminus K_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) > r\}$

Sei $y \in K_r(a)^c$, $\varepsilon = d(x, a) - r > 0$, $U_\varepsilon(x) \subseteq K_r(a)^c$

Für $r = 0$ gilt $K_r(a) = \{a\}$, und $\forall \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(a) \cap K_r(a) = \{a\} \neq \emptyset \Rightarrow \{a\} = \partial K_r(a) = K_r(a)$





Offene Menge M ist der M^c abgeschlossen.
Sei $x \in M^c$ und $\varepsilon > 0$. Fallunterscheidung auf: $x \in \partial M = \partial(M^c)$
$x \notin \partial M^c$: $U_\varepsilon(x) \cap M = \emptyset$ dann muss $U_\varepsilon(x) \cap M^c = U_\varepsilon(x) \cap \Omega \setminus M = U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$
$x \in \partial M$: $U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$, da $x \in M^c$ ist $U_\varepsilon(x) \cap M^c \neq \emptyset$ und $U_\varepsilon(x) \not\subseteq M^c$
• $\{a\}$ abgeschlossen
• Komplement jeder offene Menge ist abgeschlossen
② i: $\|x\| := a_1\|x\|_1 + a_2\|x\|_2$ ✓
ii: $\|x\|_{max} = \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$
i: • $\|x\| = 0 \iff x = 0$
• $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
$= a_1\|\lambda x\|_1 + a_2\|\lambda x\|_2$
$\|\lambda x\|_1 = |\lambda|\,\|x\|_1$
• $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
$\|x+y\| \leq a_1(\|x\|_1 + \|y\|_1) + a_2(\|x\|_2 + \|y\|_2) = (a_1\|x\|_1 + a_2\|x\|_2) + (a_1\|y\|_1 + a_2\|y\|_2)$
ii: $\|x+y\|_{max}\{\|x+y\|_1, \|x+y\|_2\}$
$\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$. Also $\|x+y\|_{max} \leq \max\{\|x\|_1 + \|y\|_1, \|x\|_2 + \|y\|_2\}$
$\max\{a+c, b+d\} \leq \max\{a,b\} + \max\{c,d\}$
$\|x+y\|_{max} \leq \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\} + \max\{\|y\|_1, \|y\|_2\}$
$\|x\|_{min} = \min\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$
$U = \mathbb{R}^2$ $\|(x,y)\|_1 = |x| + 2|y|$, $\|(x,y)\|_2 = 2|x| + |y|$
$u = (1,0)$
$v = (0,1)$
$\|u\|_{min} = \min\{1,2\} = 1$ $\|v\|_{min} = \{2,1\} = 1$
$u + v = (1,1)$ $\|u+v\|_1 = 1+2=3$ $\|u+v\|_2 = 3$
$\|u+v\|_{min} = 3$ Dann $3 = \|u+v\|_{min} > 1+1 = \|u\|_{min} + \|v\|_{min}$